140 E.S.I.M. 1983

CONCOURS 1983

OPTIONS M ET P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 2 heures

Soit un système d'équations linéaires défini par :

$$AX = B \tag{1}$$

A désigne une matrice à n lignes et n colonnes, à coefficients réels; l'élément ligne i colonne j est noté a_{ij} ; X et B désignent des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de composantes $(x_1, x_2, ..., x_n)$ et $(b_1, b_2, ..., b_n)$.

I

TRANSFORMATION DU SYSTÈME (1)

On suppose que les éléments diagonaux de A sont tous non nuls; en divisant la $i^{ème}$ équation du système (1) par son élément a_{ii} et en la résolvant selon l'inconnue x_i, on transforme le système (1) en un système équivalent :

$$X = A^* X + B^* \tag{2}$$

Préciser l'élément, ligne i colonne j, de A^* qui sera noté a^*_{ij}, ainsi que la matrice B^*, à l'aide des éléments de A et de B.

.../...

II

Une condition suffisante pour que les systèmes (1) et (2) aient une solution

On désigne par (P) la condition : les éléments diagonaux de A sont dominants c'est-à-dire pour tout i variant de 1 à n

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} |a_{ij}|$$

a. Montrer que si la condition (P) est vérifiée, la matrice A est inversible et que le système (1) a une solution unique.

Indication : On désignera par $\mathcal{A}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A. En faisant l'hypothèse, Ker $\mathcal{A}$ non réduit à $\{0\}$, on montrera, en introduisant $\alpha = \underset{i \in [1,n]}{\text{Max}} |x_i|$ où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les composantes d'un vecteur non nul de Ker $\mathcal{A}$, que l'on aboutit à une contradiction.

b. Montrer que, s'il existe une constante $C \in]0,1[$ telle que pour tout i variant de 1 à n on ait :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} |a^*_{ij}| \leqslant C < 1$$

alors le système (2) a une solution unique.

Dans la suite du problème, on suppose désormais cette condition vérifiée.

III

Méthode itérative de résolution de (2), la condition du II *b.* étant vérifiée

Soit un vecteur $X^{(0)}$ de $\mathbb{R}^n$.

On considère la formule de récurrence

$$X^{(k)} = A^* X^{(k-1)} + B^* \tag{3}$$

les itérations successives étant faites à partir de la valeur $k = 1$.

On désigne par $x_i^{(k)}$ la $i^{ème}$ coordonnée du vecteur $X^{(k)}$ et la norme choisie dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$ est $\|X\| = \underset{i=1,2,\ldots,n}{\text{Sup}} |x_i|$

x_i désignant la $i^{ème}$ coordonnée de X.

a. Montrer que pour tout entier naturel k on a :

$$\|X - X^{(k)}\| \leqslant C^k \|X - X^{(0)}\|$$

X désigne l'unique solution du système (2).

b. En déduire que la suite $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers l'unique solution du système indépendamment du choix du vecteur $X^{(0)}$.

IV

On se propose d'appliquer la méthode précédente au système (S)

$$\begin{cases} 7x - y + 2z = 1 \\ x + 8y - 3z = 3 \\ 2x + 4y + 9z = 5 \end{cases}$$

a. Déterminer la solution X du système (S) par la méthode de Gauss; on écrira un système (S') équivalent à (S) dans lequel la 2e et la 3e équation ne comportent pas x, puis un système (S") équivalent à (S') dans lequel la 3e équation ne comporte plus y. Résoudre alors (S").

On donnera les trois nombres x, y, z sous la forme de quotients de nombres entiers.

b. Déterminer les matrices A^*, B^* associées au système (S) et le réel C défini en II *b.*

Déterminer les relations de récurrence permettant de calculer les composantes x_k, y_k et z_k du vecteur $X^{(k)}$ défini par la relation de récurrence (3) et permettant de résoudre (S) ; on choisira $X^{(0)} = (1, 1, 1)$. Donner un majorant de $\|X - X^{(8)}\|$ et déterminer pour k variant de 1 à 8 les vecteurs $X^{(k)}$; les résultats seront donnés dans un tableau.

FIN